შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

28.04.2012/ მათ/ III/ 205

ამოცანა № 1

გვერდი № 1

კონფერენციაზე მყოფი 2012 დელეგაციიდან ავიღოთ ნებისმიერი სამეული. ამ სამეულიდან ცხადია რომელიღაც ორს

შორის ერთმანეთის უშუალო სუფრა (რომელშიც შემთხვევაში ამოცანის პირობა დარღვევა, რადგან არავინ ვერავის ვერ დაეპატიჟებოდა). მაშინ ეს ორნი გავაგზავნოთ სასტუმროს ნომერში და მათ შეეძლებათ ერთმანეთის სუფყები. დარჩენილ 2010 დელეგაციიდან ისევ ამოვარჩიოთ ნებისმიერი 3 დელეგაცია, და მათ შორის ისევ სასტუმროს ნომერში გავაგზავნოთ ის ორნი, რომლებიც უშუალო სუფრები ერთმანეთის. ეს პროცესი გავაგრძელოთ იქამდე/სანამ ბოლომდე, სანამ არ დაგვრჩება 4 დელეგაცია. მაშინ ამ დროისთვის სასტუმროს ნომრებში დაწყვილებული გვეყოლება 2008 დელეგაცია 1004 წყვილად და ნებისმიერ წყვილში შესაძლებელია უშუალო სუფრა

თუ დარჩენილ 4 მონაწილეში ნებისმიერ ორს შორის უშუალო სუფრა, მაშინ დავაწყვილოთ ~~[illegible]~~ I და II ერთად და III და IV ერთად და მათაც შეეძლებათ ერთმანეთის სუფრის და ამოცანის პასუხი იქნება.

ხოლო თუ რომელიღაც 2 დელეგაცია ამ დარჩენილ ოთხიდან ვერ სუფრობს უშუალოდ, ზოგადობის შეუზღუდავად ვთქვათ ესენია I და II. მაშინ რომ განვიხილოთ სამეული (I, IV და II), რადგანაც I-ს და II-სთან [illegible], ამიტომ (I და IV) სუფრობს უშუალოდ და (II და IV)-ც სუფრობს უშუალოდ. ანალოგიურად (I, III და II) სამეულში; (I და III) სუფრობს უშუალოდ და (II და III)-ც სუფრობს უშუალოდ. მაშინ ეს ოთხივე დავაწყვილოთ შემდეგ-

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

28.04.2012/ მათ/ III/ 205

ამოცანა № 1

გვერდი № 2

ხოლოდ: (I და IV) და (II და III), მაშინ ამ წყვილებს შეერთება არაწრფივიან უმოკლეს სიგრძის.

მაშასადამე მივიღეთ 2012 წვეროდან, ჩვენ დავყავით წყვილად 1006 წყვილად 2-2-ზე ისე, რომ ნებისმიერი წყვილში შეერთება არაწრფივიან უმოკლეს სიგრძის. ანუ ყველა ამოცანაც დამტკიცებულია.

რ.დ.გ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

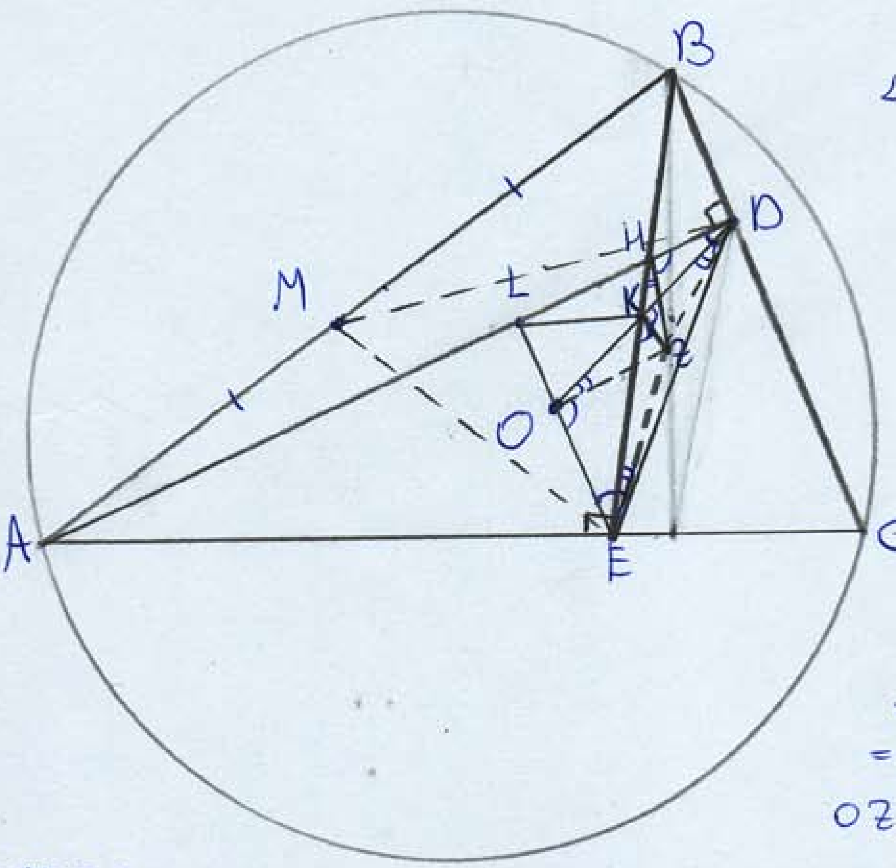
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

28.04.2012/ მათ/ III/ 205

ამოცანა № 2

გვერდი № 1



$\angle LEZ=\angle DHZ$, რადგან $LHZE$ წრეწირია. ხოლო $\angle DHZ=\angle DKZ$, რადგან $DHKZ$ წრეწირია. და $\angle OEZ=\angle OKZ \Rightarrow OKZE$ წრეწირია.

$\angle KDZ=\angle KHZ$, რადგან $KHDZ$ წრეწირია და $\angle KDZ=\angle KOZ$, რადგან $OZ=ZD$. მაშინ $\angle KOZ=KEZ$ რადგან $KOEZ$ წრეწირია $\Rightarrow KDZ=KEZ$. ამასთან $\angle ZDE=\angle ZED$, რადგან $ZE=ZD \Rightarrow \angle KED=\angle KDE \Rightarrow \underline{KE=ED}$. (1)

$OZ=ZE \Rightarrow \angle ZOE=\angle OEZ$,

მაშინ $\angle ZOE=\angle ZKE=\angle HDZ. \Rightarrow \angle HDZ=\angle OEZ$ და რადგანაც $EZ=ZD \Rightarrow \angle LED=\angle LDE \Rightarrow \underline{LE=LD}$. (2)

$AM=MB \Rightarrow \triangle ABD$-ში: $MD=\frac{AB}{2}$, იგივენაირად $\triangle ABE$-ში: $EM=\frac{AB}{2} \Rightarrow \underline{MD=ME}$ (3)

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №	

28.04.2012/ მათ/ III/ 205

ამოცანა № 2 გვერდი № 2

მაშინ (1), (2) და (3)-ს გათვალისწინებით ვიღებთ, რომ
K, L და M წერტილები, ასევე $\triangle DE$-ს [illegible],
ანუ K, L და M ერთ წრეზეა.

რ.დ.გ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №	28.04.2012/ მათ/ III/ 205
ამოცანა № 3	გვერდი № 1

ვთქვათ $a_m = x^2$ - ზუსტი კვადრატია, $x \in N$. თუ ვაჩვენებთ, რომ ამ შემდეგ მიმდევრობაში ისეთიც ყოველ ზუსტი კვადრატი მომდევნოდ $\Rightarrow \forall k, \exists n$, რომ: $n \geq k$ და a_n ზუსტი კვადრატია.

$a_m = x^2$. ცხადია $a_{m+1} = x^2 + x = x^2 + (2\cdot 0+1)x + 0^2 - 0$.

ახლა კი ვაჩვენოთ რომ თუ მიმდევრობის წევრები არის შემდეგ: $a_t = x^2 + (2k+1)x + k^2 - k$, სადაც $k < x$, მაშინ a_{t+2}-ის იგივე სახის იქნება.

$(x+k+1)^2 > a_t = x^2 + 2kx + k^2 - k + x > x^2 + 2kx + k^2 = (x+k)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{t+1} = x^2 + (2k+1)x + k^2 - k + (x+k) = x^2 + (2k+2)x + k^2$.

ცხადია: $a_{t+1} < (x+k+1)^2$ და $a_{t+1} > (x+k)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{t+2} = x^2 + (2k+2)x + k^2 + x + k = x^2 + (2(k+1)+1)x + (k+1)^2 - (k+1)$.

ანუ a_{t+2}-ის წარმოდგენილი a_t-ს წარმოდგენისგან და k ერთით გაიზარდა, და $(k+1) \leq x \Rightarrow$ აღმოჩნდა $\forall k \leq x, \exists p$, რომ: $p > m$ და $a_p = x^2 + (2k+1)x + k^2 - k$.

მაშინ, როდესაც $k = x$ ~~...~~ -1, გვექნება.

$a_p = x^2 + (2x+1)x + x^2 - x = 4x^2 = (2x)^2$.

ანუ, თუ $a_m = x^2 \Rightarrow \exists p$, რომ $a_p = (2x)^2 \Rightarrow$ a_n მიმდევრობაში ისეთიც ყოველ ზუსტი კვადრატია. ანუ ამოცანა ამოხსნილია.

ახლა კი დავამტკიცოთ ~~...~~ის საჭიროება, რომ მიმდევრობაში ერთი მაინც ზუსტი კვადრატი იქნება.

~~...~~ ვთქვათ $a_1 = x^2 + b$, $b \leq 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow$ მაშინ სადღაც მიმდევრობაში $a_t = x^2 + 2x + r$, სადაც $b = a\cdot x + r$, $r < x$. (ცხადია)

თუ გვაქვს: $a_t = x^2 + 2x + r = x^2 + 2\cdot 1\, x + 1^2 - 1 + r$. ახლა ვაჩვენოთ რომ თუ $a_t = x^2 + 2kx + r + k^2 - k$, $k < r \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{t+2} = x^2 + (2k+2)x + r + k^2 + k$.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №	28.04.2012/ მათ/ III/ 205
ამოცანა № 3	გვერდი № 2

$a_t = x^2 + 2kx + r + k^2 - k > x^2 + 2kx + k^2 = (x+k)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{t+1} = a_t + x + k = x^2 + (2k+1)x + r + k^2$.

$(x+k)^2 < a_{t+1} < x^2 + (2k+2)x + k^2 + 2k + 1$, რადგან $r < x$.

$a_{t+2} = a_{t+1} + (x+k) = x^2 + 2(k+1)x + r + k^2 + k$, სადაც $r \le k$.

ანუ $\forall k \le m$, $\exists p$, რომ: $p > m$ და:

$a_p = x^2 + 2kx + k^2 - k + r$.

მაშინ, როცა $k = r$. გვაქვს:

$a_q = x^2 + 2rx + r^2 - r + r = (x+r)^2$.

ანუ მოიძებნება q, რომ $a_q = y^2$. $y \in N$.

რ. დ. გ.